Задание 1 Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

1) Метод Крамера

Найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим по} \\ \text{1-й строке} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+1) - 4(3+2) - 2(3+2) =$$

$= -30 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение

$x_i = \dfrac{\Delta i}{\Delta}$, где Δ_i - определитель, который получается из главного определителя заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1+1) - 4(6-1) - 2(6-1) = -30$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-1) - (3+2) - 2(-3-12) = 30$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-6) - 4(-3-12) + (3+2) = 60$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{-30} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{-30} = -2$$

$(1, -1, -2)$ - решение системы

2) Матричный метод

Запишем систему в виде матричного уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det A = \Delta = -30 \neq 0$, значит, матрица A имеет обратную, а решение матричного уравнение может быть найдено по формуле $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1=0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3+2) = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+2=5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4=5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-8) = 7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-2=-6$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+6) = -5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-12=-13$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -5 & 5 & -5 \\ 5 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -5 & 5 & -5 \\ 5 & 7 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 6 \cdot 6 - 6 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 5 \cdot 6 - 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 1 + 7 \cdot 6 - 13 \cdot (-1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = -2$ – решение системы